EXERCICES ET PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

Équations différentielles du type $y' = f(x)$

Les solutions de l'équation sont les primitives de la fonction f.

Résoudre les équations différentielles suivantes (n^{os} 31 à 35)

31 $y' = 3x + 5$

32 $y' = x^2 - 3x + 1$

33 $y' = x^2 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$

34 $y' = \sin x + \cos x$

35 $y' = e^x + 2x$

Équations différentielles : $y' - ay = 0$ et $y' - ay = f(x)$ (E)

On admettra que les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant aux solutions de $y' - ay = 0$ une solution particulière de l'équation $y' - ay = f(x)$.

36 Résoudre les équations différentielles

a) $\dfrac{y'}{2} + 2y = 0$

b) $7y' - 3y = 0$

37 On considère l'équation différentielle :

$$3y' + 2y = 3 \qquad \text{(E)}$$

a) Vérifier que les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{2}{3}x} + \dfrac{3}{2}$ sont les solutions de (E).

b) Déterminer la solution particulière f telle que $f(0) = 2$.

38 On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = x \qquad (E)$$

a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $x \mapsto ax + b$ soit solution de (E). On définit ainsi une solution particulière.

b) Déterminer les solutions de $y' - 2y = 0$. En déduire les solutions de (E).

39 On considère l'équation différentielle :

$$y' - y = \sin x \qquad (E)$$

a) Déterminer les réels A et B tels que la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{A} \cos x + \mathrm{B} \sin x$$

soit solution de (E). On obtient ainsi une solution particulière.

b) Déterminer les solutions de $y' - y = 0$.

En déduire les solutions de (E).

Équations différentielles $y'' + ay' + by = 0$ et $y'' + ay' + by = f(x)$

40 Résoudre les équations différentielles :

a) $y'' + 36y = 0$

b) $2y'' + 3y = 0$

c) $3y'' + 2y = 0$

41 Résoudre les équations différentielles :

a) $y'' - 10y' + 25y = 0$

b) $y'' - 5y' - 6y = 0$

c) $y'' + 3y' + y = 0$

42 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos 2x - \sin 2x$$

a) On pose $y = f(x)$ et $y'' = f''(x)$

Trouver une relation simple entre y et y''.

b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = 0$$

Déterminer la fonction g qui vérifie :

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

43 On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 2y = \sin x$$

a) Déterminer le réel A pour que la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{A} \sin x$$

soit une solution particulière de (E).

b) Déterminer les solutions de $y'' - 2y = 0$.

En déduire les solutions de (E). (On ajoute aux solutions de $y'' - 2y = 0$ la solution particulière trouvée en *a*).)

Problèmes divers

44 Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance.

La température $\theta(t)$ de la citerne vérifie l'équation différentielle :

$$\theta' = a - b\theta \qquad (1)$$

avec $a = 2{,}088 \times 10^{-2}$ et $b = 2{,}32 \times 10^{-4}$ lorsque t est exprimée en seconde et $\theta(t)$ en °C.

a) On pose $\theta = y + 90$ d'où $\theta' = y'$.

Montrer que l'équation (1) devient :

$$y' = -by \qquad (2)$$

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'expression de $\theta(t)$ sachant que $\theta(0) = 20$.

d) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80°C?

45 On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé.

a) On suppose que le nombre $N(t)$ de bactéries par millilitre à l'instant t vérifie l'équation différentielle, pour $t \geqslant 0$:

$$N'(t) - 0{,}2N(t) = 0$$

Résoudre l'équation différentielle.

Déterminer la solution particulière vérifiant la condition $N(0) = 10^4$ bactéries par millilitre.

b) Donner une estimation de t lorsque le nombre de bactéries par millilitre est égal à 21 000.

46 La désintégration d'un corps radioactif se traduit par la relation :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

où t est le temps compté en jours,

N le nombre d'atomes du corps radioactif à l'instant t et λ la constante radioactive de ce corps.

a) Soit N_0 le nombre d'atomes du corps à l'instant $t = 0$. Calculer N en fonction de N_0, t et λ

(On montrera que $N = N_0 e^{-\lambda t}$)

b) On appelle « période » ou « demi-vie » de ce corps radioactif le temps T au bout duquel le nombre d'atomes de ce corps a diminué de moitié.

Montrer que $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

c) Calculer la constante radioactive du radium sachant que sa période est 11,7 jours et celle du thorium sachant que sa période est 18,2 jours.

47 La figure 4 représente une masse fixée à l'extrémité d'un ressort vertical. La position de la masse à l'instant t est repérée sur l'axe vertical $y'Oy$ par son abscisse $f(t)$.

On admet que la fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$

a) Déterminer la fonction f sachant que :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

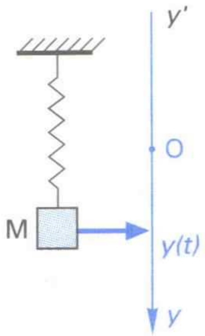

Fig. 4

b) Montrer que $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

48 Un oscillateur électrique est un circuit constitué d'un condensateur de capacité C (en farads), en série avec une bobine d'auto-inductance L (en henry), de résistance négligeable, alimenté par un générateur de force électromotrice E (fig. 5) :

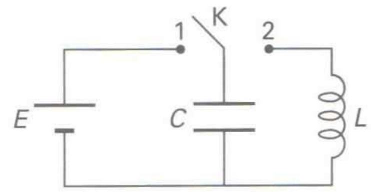

Fig. 5

A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K en position 1, le condensateur se charge. La charge se termine lorsque la tension aux bornes du condensateur est $U_0 = E$ (volt), la charge est alors $q_0 = CU_0$ et l'intensité $i_0 = 0$.

On ferme alors l'interrupteur K en position 2, le circuit oscille et la charge q du condensateur à l'instant t est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q''(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0$$

L'intensité du courant à l'instant t est $i(t) = q'(t)$.

On donne $L = 0{,}625$; $C = 1{,}6 \times 10^{-6}$.

a) Résoudre l'équation (E).

b) Déterminer la solution particulière q répondant aux conditions initiales :

$U_0 = E = 12{,}5$; $i_0 = 0$ c'est-à-dire $q(0) = 1{,}6 \times 10^{-6} \times 12{,}5$ et $q'(0) = i_0 = 0$. Quelle est l'expression de l'intensité $i(t)$?

49 L'établissement d'un courant d'intensité i dans un circuit comprenant en série un générateur de force électromotrice E ($E = 10$ volts) et une bobine de résistance R ($R = 100$ ohms) et d'inductance L ($L = 0{,}2$ henry) se traduit par l'équation différentielle

$$Li'(t) + Ri(t) = E \quad \text{soit} \quad \frac{1}{5}i' + 100i = 10 \qquad (1)$$

(la variable t est exprimée en secondes)

a) En posant $i(t) = I(t) + \dfrac{1}{10}$, montrer que la fonction I vérifie sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$\frac{1}{5}I' + 100I = 0$$

Résoudre cette équation différentielle.

b) Déterminer la fonction i, solution de (1) vérifiant la condition initiale $i(0) = 0$.