EXERCICES RÉSOLUS

1 Équation différentielle du type $y' - ay = 0$

La solution générale de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = Ce^{ax}$$

■ **Résoudre les équations différentielles :**

$$\mathbf{y' - 2y = 0 \quad \text{et} \quad y' + 3y = 0}$$

• Dans la 1re équation $a = 2$. Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{2x}$.

Dans cette équation $a = -3$

• Dans la 2e équation $a = -3$. Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{-3x}$.

■ **Résoudre l'équation différentielle $y' + 4y = 0$**
Déterminer la solution particulière qui prend la valeur 3 pour $x = 0$.

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = Ce^{-4x}$$

Or $f(0) = 3$ soit $Ce^0 = 3$ donc $C = 3$
La solution particulière est la fonction $f : x \mapsto 3e^{-4x}$

2 Décharge d'un condensateur

■ **Durant la décharge d'un condensateur de capacité C dans un circuit comportant une résistance R, la charge $q(t)$ du condensateur vérifie :**

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = 0 \qquad (1)$$

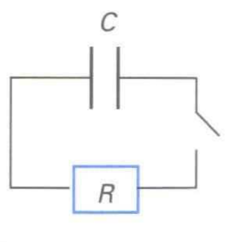

Fig. 2

$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = 0$ s'écrit aussi

$$q' + \frac{1}{RC}q = 0$$

■ ***a*) Résoudre l'équation (1) lorsque $R = 10^5\ \Omega$ et $C = 10^{-6}$ F.**
***b*) Déterminer $q(t)$ sachant qu'à l'instant initial $q(0) = 10^{-2}$ coulombs (fig. 2).**

a) Les solutions de (1) sont les fonctions définies par :

$$q(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} \quad (k \text{ constante arbitraire})$$

$$RC = 10^5 \times 10^{-6} = 10^{-1} \quad \text{donc} \quad q(t) = ke^{-10t}$$

b) Si $q(0) = 10^{-2}$ alors $ke^0 = 10^{-2}$ soit $k = 10^{-2}$
donc $$q(t) = 10^{-2}e^{-10t}$$

3 Équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions f définies par

$$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

A et B sont des constantes arbitraires.

■ **Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$**
Déterminer la solution particulière f telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{A} \cos 2x + \mathrm{B} \sin 2x$$

Déterminons A et B tels que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$

$$f'(x) = -2\mathrm{A} \sin 2x + 2\mathrm{B} \cos 2x$$

Donc

$$\begin{cases} f(0) = \mathrm{A} = 2 \\ f'(0) = 2\mathrm{B} = 2 \quad \text{donc} \quad \mathrm{B} = 1 \end{cases}$$

La solution particulière est la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 \cos 2x + \sin 2x$$

4 Équation différentielle du type $y'' + ay' + by = 0$

Pour résoudre $y'' + ay' + by = 0$ on détermine les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

- **Si r_1 et r_2 sont réels :**
  $$f(x) = \mathrm{A}e^{r_1 x} + \mathrm{B}e^{r_2 x}$$
- **Si $r_1 = r_2 = r$**
  $$f(x) = (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^{rx}$$

■ **Résoudre les équations différentielles :**
$y'' - 6y' + 8y = 0$; $y'' - 6y' + 9y = 0$

- L'équation caractéristique de $y'' - 6y' + 8y = 0$ est :
  $$r^2 - 6r + 8 = 0. \quad \text{On obtient } r_1 = 2,\ r_2 = 4.$$
  Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
  $$f(x) = A\,e^{2x} + B\,e^{4x}$$
- L'équation caractéristique de $y'' - 6y' + 9y = 0$ est :
  $$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \text{soit} \quad (r-3)^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad r = 3$$
  Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
  $$f(x) = (Ax + B)e^{3x}$$

Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ alors

$$f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$$

■ **Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 20y = 0$**

L'équation caractéristique est : $r^2 - 4r + 20 = 0$

$$\Delta = (4)^2 - 4 \times 20 = -64 = (8i)^2$$

$$r_1 = \frac{4 - 8i}{2} = 2 - 4i; \quad r_2 = \frac{4 + 8i}{2} = 2 + 4i$$

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (A \cos 4x + B \sin 4x)e^{2x}$$

5 Charge d'un condensateur

■ **Un condensateur de capacité C se charge à travers l'élément résistif de résistance R sous l'action d'une source de tension de force électromotrice continue E. L'équation différentielle correspondante s'écrit :**

(1) $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{RC} = \dfrac{E}{C}$ où q est la charge du condensateur à l'instant t.

a **Montrer que $q_1 = CE$ est solution particulière de l'équation (1).**

b) **Résoudre l'équation différentielle sans second membre :**

$$q' = \frac{1}{RC}q = 0$$

c) **Sachant que les solutions de l'équation $y' + ay = f(x)$ s'obtiennent en ajoutant à l'une d'entre elles toutes les solutions de l'équation différentielle sans second membre $y' + ay = 0$, écrire la solution générale de l'équation (1).**

Que devient cette expression si pour $t = 0$, $q = 0$? Cas particulier :

$$CE = 2\,.\,10^{-6} \quad \text{et} \quad RC = 1$$

Cette solution $q_1 = CE$ est appelée *solution particulière* de l'équation (1).

a) Si $q = CE$, $\frac{dq}{dt} = 0$ donc $0 + \frac{CE}{RC} = \frac{E}{R}$

donc $q_1 = CE$ est une solution de (1).

b) $q' + \frac{1}{RC}q = 0$ donc $q(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$

c) La solution générale de (1) est : $q(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + CE$

Pour $t = 0$, $q(0) = 0 = k + CE$ donc $k = -CE$

Donc $$q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Si $RC = 1$ et $CE = 2\,.\,10^{-6}$ alors $q(t) = 2\,.\,10^{-6}(1 - e^{-t})$.

6 Mécanique du point matériel

■ **Une masse m mobile sur un axe $(O, \vec{i})$ est soumise à une force attractive telle que l'abscisse $x(t)$ du point M, fonction du temps vérifie : $x'' + \frac{\pi^2}{4}x = 0$ (1) (fig. 3).**

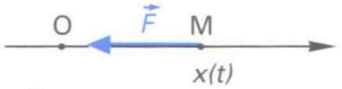

Fig. 3

Exprimer la solution de (1) qui vérifie $x(0) = 1$ et $x'(0) = \frac{\pi}{2}$.

Équation du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega^2 = \frac{\pi^2}{4}$

On a : $$x(t) = A\cos\frac{\pi}{2}t + B\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$x'(t) = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t + B\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$$

$x(0) = 1$ donne $A = 1$; $x'(0) = \frac{\pi}{2}$ donne $B = 1$, donc

$$x(t) = \cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t$$

Remarquons que la vitesse du point M à l'instant t est définie par la dérivée de la fonction $t \mapsto x(t)$.

$$x'(t) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$$

soit $$x'(t) = \frac{\pi}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{2}t + \cos\frac{\pi}{2}t\right)$$

Pour $t = 1$, $x'(1) = -\frac{\pi}{2}$ et le vecteur vitesse est $\vec{V} = -\frac{\pi}{2}\vec{i}$