EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Équation du type $y' - ay = 0$

Résoudre les équations différentielles suivantes (n^{os} 1 à 5)

1. $y' - 2y = 0$; $\quad y' - y = 0$

2. $y' + \frac{1}{4}y = 0$; $\quad y' - \frac{1}{2}y = 0$

3. $2y' + y = 0$; $\quad 3y' - y = 0$

4. $2y' + 3y = 0$; $\quad 5y' - 2y = 0$

5. $-2y' + 5y = 0$; $\quad -y' + 6y = 0$

Résoudre les équations différentielles suivantes et déterminer pour chacune d'elles la solution définie par la condition imposée (n^{os} 6 à 11)

6. $y' + y = 0$ avec $f(0) = 1$

7. $y' + \frac{2}{3}y = 0$ avec $f(0) = -1$

8. $2y' + y = 0$ avec $f(1) = 1$

9. $4y' + 5y = 0$ avec $f(1) = -1$

10. $y' + y = 0$ avec $f(\ln 4) = 1$

11. *a*) Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$

b) Soit l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 4 \tag{1}$$

Vérifier que la fonction $x \mapsto 2$ est une solution particulière de (1).

c) Vérifier que les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{-2x} + 2$ sont solution de (1).

Équation du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Résoudre les équations différentielles suivantes (n^{os} 12 à 16)

12. $y'' + y = 0$; $\quad y'' + 2y = 0$

13. $y'' + 3y = 0$; $\quad y'' + \frac{1}{4}y = 0$

14. $y'' + 16y = 0$; $\quad y'' + 25y = 0$

15. $2y'' + y = 0$; $\quad 9y'' + y = 0$

16. $4y'' + 9y = 0$; $\quad 9y'' + 4y = 0$

Trouver la solution f de chacune des équations différentielles vérifiant les conditions initiales données (n^{os} 17 à 20)

17. $y'' + 3y = 0$; $\quad f(0) = 1$; $\quad f'(0) = \sqrt{3}$

18. $y'' + \frac{1}{9}y = 0$; $\quad f(0) = 2$; $\quad f'(0) = 1$

19. $2y'' + y = 0$; $\quad f(0) = 1$; $\quad f'(0) = 0$

20. $y'' + 9y = 0$; $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

21. *a*) Résoudre l'équation différentielle :

$$4y'' + 9y = 0$$

b) Déterminer la solution particulière f vérifiant :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Équation du type $y'' + ay' + by = 0$

Résoudre les équations différentielles suivantes (n^{os} 22 à 29)

22. $y'' - 2y = 0$

23. $y'' - 4y = 0$

24. $2y'' - y = 0$

25. $y'' - 3y' + 2y = 0$

26. $y'' + y' - 2y = 0$

27. $2y'' + y' - y = 0$

28. $y'' + y' + y = 0$

29. $y'' - 6y' + 9y = 0$

30. Résoudre l'équation différentielle :

$$3y'' + y' - 4y = 0$$

Déterminer la solution particulière f vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Réponses

1. $y = Ce^{2x}$; $\quad y = Ce^{x}$

2. $y = Ce^{-\frac{x}{4}}$; $\quad y = Ce^{\frac{x}{2}}$

3. $y' + \frac{1}{2}y = 0$ donc $y = Ce^{-\frac{x}{2}}$

$y' - \frac{1}{3}y = 0$ donc $y = Ce^{\frac{x}{3}}$

4. $y' + \frac{3}{2}y = 0$ donc $y = Ce^{-\frac{3x}{2}}$

$y' - \frac{2}{5}y = 0$ donc $y = Ce^{\frac{2x}{5}}$

5. $y' - \frac{5}{2}y = 0$ donc $y = Ce^{\frac{5x}{2}}$

$y' - 6y = 0$ donc $y = Ce^{6x}$

6. $f(x) = Ce^{-x}$; $\quad f(0) = 1 = C$ donc $f(x) = e^{-x}$

7. $f(x) = Ce^{-\frac{2}{3}x}$;

$f(0) = -1 = C$ donc $f(x) = -e^{-\frac{2}{3}x}$

8. $f(x) = Ce^{-\frac{x}{2}}$; $\quad f(1) = 1 = Ce^{-\frac{1}{2}}$ donc $C = e^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}} . e^{-\frac{x}{2}}$ soit $f(x) = e^{\frac{1-x}{2}}$

9. $f(x) = Ce^{-\frac{5x}{4}}$; $\quad f(1) = -1 = Ce^{-\frac{5}{4}}$ donc

$C = -e^{\frac{5}{4}}$ d'où $f(x) = -e^{\frac{5}{4}(1-x)}$

10. $f(x) = Ce^{-x}$; $\quad f(\ln 4) = 1 = Ce^{-\ln 4}$

$C = e^{\ln 4} = 4$; $\quad f(x) = 4e^{-x}$

11. *a)* $f(x) = Ce^{-2x}$

b) La fonction $x \mapsto 2$ a une dérivée nulle donc :

$$0 + 2 \times 2 = 4.$$

Cette fonction est bien une solution particulière.

c) $f'(x) = -2Ce^{-2x}$

d'où la relation :

$$-2Ce^{-2x} + 2(Ce^{-2x} + 2) = 4$$

est bien vérifiée.

12. $y = A\cos x + B\sin x$

$y = A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x$

13. $y = A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x$

$y = A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}$

14. $y = A\cos 4x + B\sin 4x$

$y = A\cos 5x + B\sin 5x$

15. $y = A\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + B\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$

$y = A\cos\frac{x}{3} + B\sin\frac{x}{3}$

16. $y'' + \frac{9}{4}y = 0$; $\quad y = A\cos\frac{3x}{2} + B\sin\frac{3x}{2}$

$y'' + \frac{4}{9}y = 0$; $\quad y = A\cos\frac{2}{3}x + B\sin\frac{2}{3}x.$

17. $f(x) = A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x$; $\quad f(0) = 1 = A$

$f'(x) = -A\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + B\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x$;

$f'(0) = \sqrt{3} = B\sqrt{3}$

donc $B = 1$

d'où $f(x) = \cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x$

18. $f(x) = A\cos\frac{x}{3} + B\sin\frac{x}{3}$; $\quad f(0) = 2 = A$

$f'(x) = -\frac{A}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{B}{3}\cos\frac{x}{3}$; $\quad f'(0) = 1 = \frac{B}{3}$; $\quad B = 3$

d'où $f(x) = 2\cos\frac{x}{3} + 3\sin\frac{x}{3}$

19. $y'' + \frac{y}{2} = 0$ donc $f(x) = A\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + B\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$

$f(0) = 1 = A$; $\quad f'(x) = -\frac{A}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$

$f'(0) = 0 = \frac{B}{\sqrt{2}}$ donc $B = 0$ d'où

$f(x) = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}$

20. $f(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\cos\frac{3\pi}{2} + B\sin\frac{3\pi}{2} = -B = 0$

$f'(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$; $\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3A = 1$ donc $A = \frac{1}{3}$

d'où $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x$

21. $f(x) = A\cos\frac{3}{2}x + B\sin\frac{3}{2}x$ avec $A + B = 2$ et

$-A + B = 0$ donc $A = B = 1$ soit $f(x) = \cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}$