1 Équation du premier degré à deux inconnues

Une équation du premier degré à deux inconnues x et y se présente sous la forme : $ax + by = c$ où a, b et c sont des nombres connus.

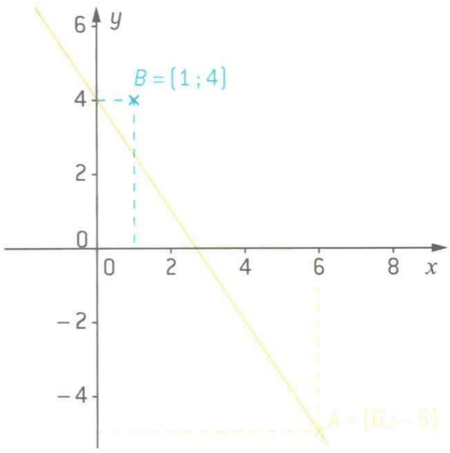
Tous les **couples $(x ; y)$** pour lesquels l'égalité $ax + by = c$ est vraie sont **des solutions**.
Toute égalité $ax + by = c$ peut être transformée pour obtenir **l'équation d'une droite d** sous la forme **$y = mx + p$**.
Tout couple $(x ; y)$ correspondant à un **point situé sur la droite d est solution** de l'équation.

exemple

L'égalité $3x + 2y = 8$ est équivalente à $2y = 8 - 3x$.

Soit $y = \frac{8-3x}{2}$ ou $y = -1{,}5x + 4$.

Le couple $(6 ; -5)$ est une des solutions de cette équation.
$3x + 2y = 3 \times 6 + 2 \times (-5) = 8$.
Le point $A(6 ; -5)$ appartient à la droite d'équation $y = -1{,}5x + 4$.
Le couple $(1 ; 4)$ n'est pas solution de cette équation.
$3x + 2y = 3 \times 1 + 2 \times 4 = 11 \quad (\neq 8)$.
Le point $B(1 ; 4)$ n'appartient pas à la droite d'équation $y = -1{,}5x + 4$.



2 Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Un système de deux équations à deux inconnues se présente sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', et c' sont des nombres connus.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est trouver les couples $(x ; y)$ qui sont **solutions des deux équations**.

exemple

Le système $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$ a pour solution le couple $(x = 2 ; y = 1)$.

$$3 \times 2 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$$

Le couple $(x = 2 ; y = 1)$ vérifie la première équation.

$$5 \times 2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

Le couple $(x = 2 ; y = 1)$ vérifie la seconde équation.

3 Résoudre graphiquement un système de deux équations à deux inconnues

Pour résoudre graphiquement un système de deux équations à deux inconnues :

- **Transformer** chaque équation du système pour qu'elle apparaisse sous la forme d'une **équation de droite ($y = mx + p$)**.
- **Représenter les deux droites** correspondantes dans un même repère.
- Lire, si elles existent, les **coordonnées du point d'intersection** des deux droites, solution du système.

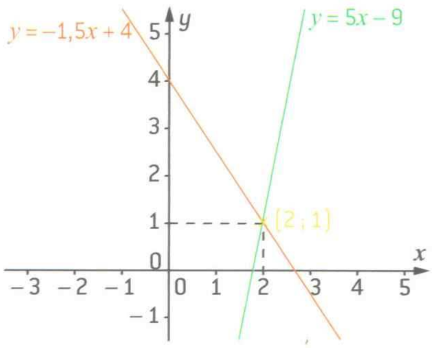
exemple

Le système $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 5x-y=9 \end{cases}$

est équivalent à $\begin{cases} y=-1{,}5x+4 \\ y=5x-9 \end{cases}$.

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites, solution du système sont :

$(x = 2\,; y = 1)$.



On distingue deux cas particuliers :

- Les droites tracées sont **parallèles** : le système n'admet **pas de solution**.
- Les droites tracées sont **confondues : tous les couples de coordonnées** des points de la droite sont solution.

4 Résoudre par le calcul un système de deux équations à deux inconnues

Cette méthode consiste à éliminer une des deux inconnues en **ajoutant membre à membre** les deux équations après les avoir **multipliées par des facteurs adaptés**.

exemple

On considère le système :

$$\begin{cases} 3x-4y=20 & (E_1) \\ 2x+y=6 & (E_2) \end{cases}$$

On choisit quelle inconnue éliminer.	Inconnue à éliminer : y.
On repère les coefficients devant cette inconnue dans chaque équation.	Coefficient dans (E_1) : (-4) Coefficient dans (E_2) : 1
On cherche par quel facteur multiplier chaque équation pour que les coefficients soient opposés.	Aucun changement pour (E_1) $(E_2) \times 4$
On multiplie chaque terme de l'équation par le facteur choisi.	$\begin{cases} 3x-4y=20 \\ 2x\times4+y\times4=6\times4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-4y=20 \\ 8x+4y=24 \end{cases}$
On additionne membre à membre les deux équations. On obtient une équation à une inconnue.	$3x + 8x - 4y + 4y = 20 + 24$ $11x = 44$
On résout l'équation obtenue.	$x=\dfrac{44}{11}=4$.
On remplace l'inconnue par la valeur trouvée dans (E_1) ou (E_2) pour en déduire la valeur de l'autre inconnue.	$2x + y = 6$ s'écrit $2 \times 4 + y = 6$ $8 + y = 6$ $y = 6 - 8 = -2$
On conclut.	Le système admet pour solution le couple $(4\,; -2)$.
On vérifie.	$\begin{cases} 3\times4-4\times(-2)=12+8=20 \\ 2\times4+(-2)=8-2=6 \end{cases}$

On aurait pu choisir d'éliminer l'inconnue x :
Coefficient devant x dans (E_1) : 3 Facteur à appliquer à E_1 : $\times 2$
Coefficient devant x dans (E_2) : 2 Facteur à appliquer à E_2 : $\times(-3)$

$$\begin{cases} 3x-4y=20 & (E_1)\times 2 \\ 2x+y=6 & (E_2)\times(-3) \end{cases} \text{ devient } \begin{cases} 3x\times 2-4y\times 2=20\times 2 \\ 2x\times(-3)+y\times(-3)=6\times(-3) \end{cases}$$

soit $\begin{cases} 6x-8y=40 \\ -6x-3y=-18 \end{cases}$

Par addition on obtient :

$$6x-6x-8y-3y=40-18$$

$$-11y=22 \qquad y=\frac{22}{-11}=-2.$$

5 Choisir la méthode de résolution la plus adaptée

Le choix dépend du contexte du problème posé, mais on peut dire que :
- dans tous les cas, la méthode **par le calcul** donne **les valeurs exactes** du couple solution,
- graphiquement, n'étant jamais certain de la précision, on n'obtient souvent que des valeurs approchées.

exemple

Résolution par le calcul de :

$$\begin{cases} 3x-5y=-4 & (E_1) \\ 6x+y=3 & (E_2) \end{cases}$$

Le système est équivalent à

$$\begin{cases} 3x-5y=-4 & (E_1) \\ 30x+5y=15 & (E_2)\times 5 \end{cases}$$

Par addition, on obtient :

$$33x=11 \quad \text{soit} \quad x=\frac{1}{3}$$

En reprenant (E_1) :

$$3\times\frac{1}{3}-5y=-4 \quad \text{soit} \quad y=1$$

Le système admet pour solution le couple $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Résolution graphique de :

$$\begin{cases} 3x-5y=-4 \\ 6x+y=3 \end{cases}$$

Le système est équivalent à

$$\begin{cases} y=\dfrac{3x+4}{5} & (d_1) \\ y=3-6x & (d_2) \end{cases}$$

On lit graphiquement que le système admet comme solution le couple (0,33 ; 1).
Cette méthode est moins efficace car elle ne permet d'obtenir qu'une valeur approchée de la solution.