11 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

OBJECTIFS

Les équations différentielles se rencontrent dans toutes les disciplines scientifiques. La nouveauté principale du présent chapitre est que l'inconnue d'une équation différentielle est une fonction.

Il faut savoir :

- **Reconnaître une équation différentielle du type $y' + ay = 0$ et $y'' + \omega^2 y = 0$ et les résoudre.**
- **Résoudre une équation différentielle du type :**
$$y'' + ay' + by = 0.$$

TRAVAUX PRATIQUES

1 Comment peut-on obtenir une équation différentielle ?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. Sa dérivée est $f'(x) = e^x$.
Pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ soit $f'(x) - f(x) = 0$.
On a ainsi obtenu une relation entre la fonction f et sa dérivée f'.
Si on pose $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ la relation s'écrit :

$$y' - y = 0 \qquad (1)$$

C'est une *équation différentielle du premier ordre* dont l'inconnue est une fonction.
D'après sa formation, on voit qu'une solution de l'équation différentielle est la fonction $x \mapsto e^x$.

Répondre aux questions suivantes :

1° Les fonctions : $x \mapsto 2e^x$, $x \mapsto -3e^x$, $x \mapsto e^{2x}$ sont-elles des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

2° Vérifier que toutes les fonctions $x \mapsto Ce^x$ où C est une constante arbitraire sont des solutions de (1).
On dit que l'ensemble de ces fonctions est la *solution générale* de (1).

2 L'équation différentielle $y' = 2x$

Résoudre l'équation différentielle $y' = 2x$ c'est déterminer les fonctions f qui vérifient $f'(x) = 2x$.
On constate que ces fonctions sont les primitives de la fonction $x \mapsto 2x$. Ce sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + C \qquad (C \text{ constante arbitraire})$$

Répondre aux questions suivantes :

1° Résoudre les équations différentielles :

$$y' = 3x + 1 \quad \text{et} \quad y' = x^2 + x$$

2° Vérifier que les solutions de la 1re équation sont les fonctions f définies par $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + C$.

3 Une équation différentielle du second ordre

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$

On a : $f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x$

donc $f''(x) = -f(x) \quad \text{soit} \quad f''(x) + f(x) = 0$

On obtient ainsi l'*équation différentielle du second ordre* (ordre de la dérivée) :

$$y'' + y = 0$$

Répondre à la question suivante :

Les fonctions suivantes :

$$x \mapsto 2\cos x; \quad x \mapsto \sin x; \quad x \mapsto \cos x + \sin x$$

sont-elles des solutions de l'équation $y'' + y = 0$?

4 Les équations différentielles en sciences physiques

• L'établissement d'un courant d'intensité i, en fonction du temps, dans un circuit de résistance R, d'inductance L, sous l'action d'une force électromotrice E vérifie l'équation différentielle :

$$Li' + Ri = E \quad \text{qu'on écrit} \quad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$$

• Le mouvement d'une masse schématisée par un point M fixée à l'extrémité d'un ressort vertical se traduit par une équation différentielle du type $y'' + ky = 0$.
La fonction définie par $y(t)$ détermine la position de M en fonction du temps (fig. 1).
Ces équations seront résolues dans ce chapitre.

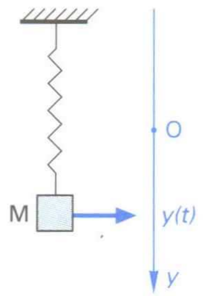

Fig. 1