Fonctions et dérivation

6

VOUS ALLEZ APPRENDRE À...

- Déterminer graphiquement le nombre dérivé d'une fonction pour une valeur de la variable.
- Construire une tangente à la courbe représentative d'une fonction et déterminer une équation de cette tangente.
- Utiliser les règles de dérivation pour calculer la dérivée d'une fonction.
- Utiliser la fonction dérivée pour :
  - étudier les variations d'une fonction sur un intervalle ;
  - mettre en évidence un minimum ou un maximum d'une fonction.

POUR VOUS AIDER...

Fiche méthode 23 • p. 163
Comment déterminer graphiquement un nombre dérivé ?

Fiche méthode 24 • p. 163
Comment construire une tangente et en déterminer une équation ?

Fiche méthode 25 • p. 164
Comment calculer une dérivée ?

Fiche méthode 26 • p. 164
Comment étudier les variations d'une fonction ?

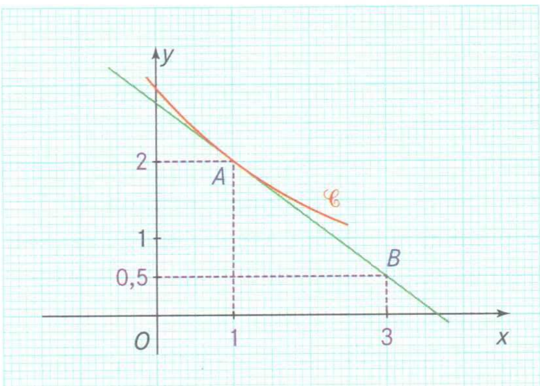
Fiche l'essentiel • p. 182

Exercices d'entraînement

Nombre dérivé et tangente

Fiches méthodes 23 et 24

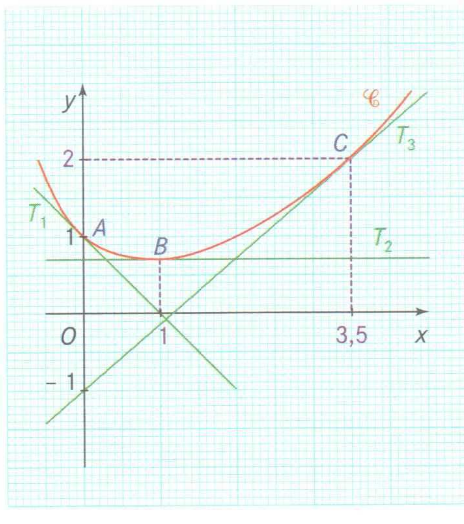
1 La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f. Les coordonnées de A et B sont : $A(1\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 0{,}5)$. La droite (AB) est la tangente en A à $\mathscr{C}$.



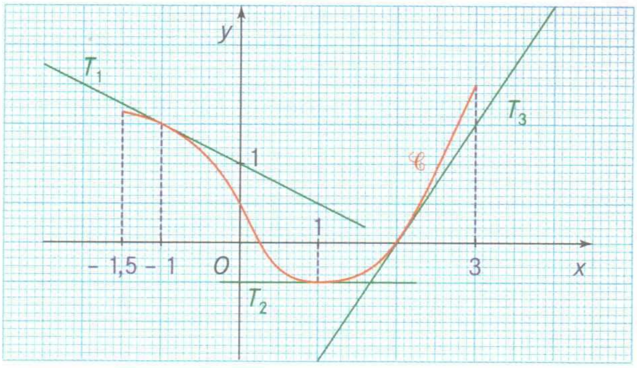
1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

2. Donner le nombre dérivé $f'(1)$.

2 La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f.
Les droites T_1, T_2, T_3 sont les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, B, C.
Déterminer, par lecture graphique, les nombres dérivés $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(3{,}5)$.



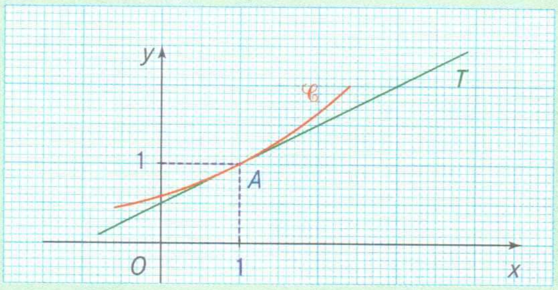
3 La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[-1{,}5\ ;\ 3]$.
Les droites T_1, T_2, T_3 sont les tangentes à $\mathscr{C}$ en ses points d'abscisses -1, 1, 2.
Déterminer graphiquement les nombres dérivés : $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$.



ÊTES-VOUS CAPABLE DE ...

...déterminer graphiquement un nombre dérivé ?

1. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f.
La droite T est tangente en A à $\mathscr{C}$.



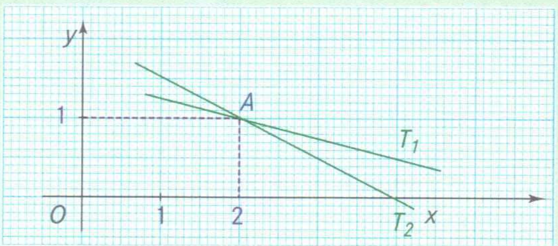
Quel est le nombre dérivé $f'(1)$?

❑ $-0{,}5$ ❑ 2 ❑ $0{,}5$

Fiche méthode 23 p. 163
► Réponse p. 189

...construire une tangente et d'en déterminer l'équation ?

2. Le point A est un point de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f. On sait que $f'(2) = -0{,}25$.



a) Quelle est la tangente en A à $\mathscr{C}$?
❑ la droite T_1 ❑ la droite T_2

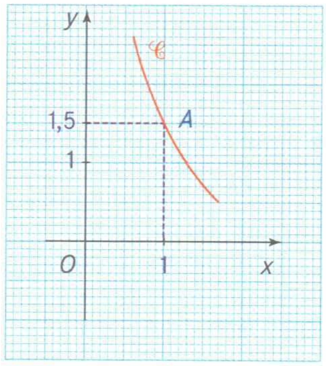
b) Quelle est l'équation de cette tangente ?
❑ $y = -0{,}25x + 2$ ❑ $y = -0{,}25x + 1{,}5$

Fiche méthode 24 p. 163
► Réponse p. 189

LE SAVIEZ-VOUS ?

En latin « tangere » signifie « toucher ». Parmi les droites passant par A, la tangente en A à $\mathscr{C}$ est celle, qui semble « toucher » $\mathscr{C}$.

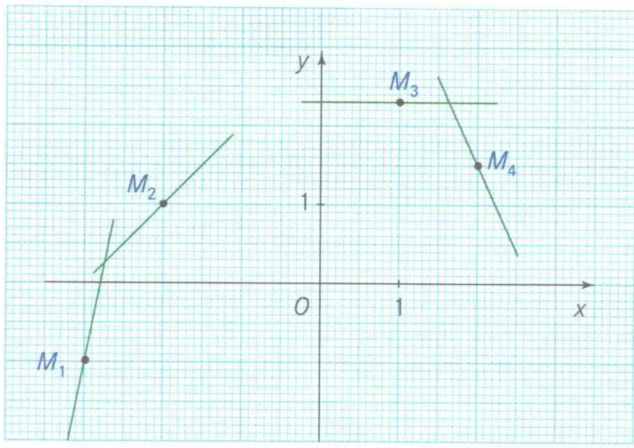
4 La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f.
A est le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(1\ ;\ 1{,}5)$.



1. Tracer approximativement à la règle la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Indiquer quel est le nombre dérivé $f'(1)$ sachant qu'il figure dans la liste suivante :
$-3{,}5\ ;\ -1{,}5\ ;\ -2\ ;\ 2{,}5$.

5 Dans le repère ci-dessous, sont placés les points M_1, M_2, M_3, M_4 par lesquels passe la courbe représentative d'une fonction f. Les tangentes en ces points sont tracées.
Donner une allure possible de la courbe.



6 Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
Les points $A(0\ ;\ -1)$ et $B(2\ ;\ 0)$ sont des points de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f.
La tangente en A à $\mathscr{C}$ passe par le point $C(-2\ ;\ 0)$; la tangente en B à $\mathscr{C}$ passe par le point $D(0\ ;\ -4)$.

1. Placer les points A, B, C et D.

2. Tracer les tangentes en A et en B à la courbe $\mathscr{C}$.

3. Tracer une allure possible de la courbe $\mathscr{C}$.

4. Déterminer graphiquement $f'(0)$ et $f'(2)$.

7 Dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, les points $A(-1\,;1)$, $B(0\,;2)$, $C(2\,;1{,}5)$ appartiennent à la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f.

1. Placer les points A, B et C.

2. Sachant que $f'(-1)=2$, construire la tangente T_1 en A à $\mathscr{C}$.

3. Sachant que $f'(0)=0$, construire la tangente T_2 en B à $\mathscr{C}$.

4. Donner une allure possible de la courbe $\mathscr{C}$.

8 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ par $f(x)=x^2$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Placer les points $A(-1\,;1)$ et $B(1\,;1)$ de la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Sachant que $f'(-1)=-2$, construire la tangente T_1 en A à $\mathscr{C}$.

b) Sachant que $f'(1)=2$, construire la tangente T_2 en B à $\mathscr{C}$.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

9 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;4]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Placer les points $A(1\,;1)$ et $B(2\,;0{,}5)$ de la courbe $\mathscr{C}$.

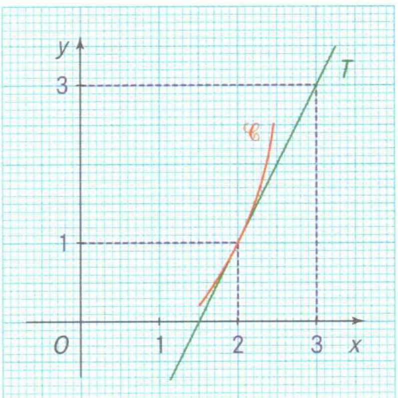
2. a) Sachant que $f'(1)=-1$, construire la tangente T_1 en A à $\mathscr{C}$.

b) Sachant que $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$, construire la tangente T_2 en B à $\mathscr{C}$.

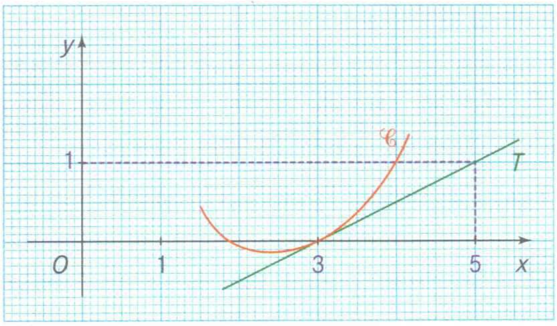
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Pour les exercices 10 à 13, *$\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f.*
La droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse a.
1. À partir du graphique, déterminer $f'(a)$.
2. Déterminer une équation de la tangente T.

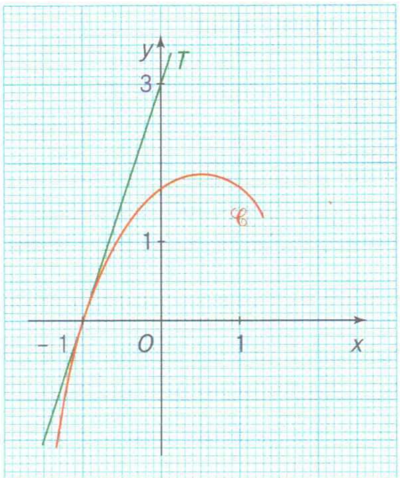
10 $a=2$



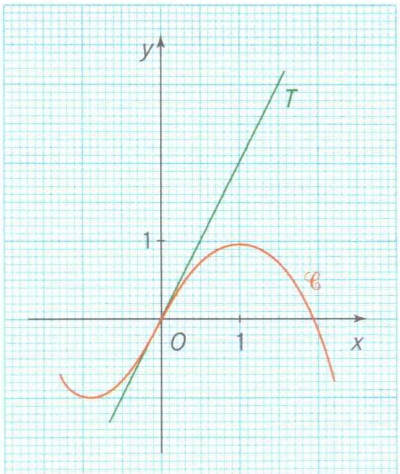
11 $a=3$



12 $a=-1$



13 $a=0$



14 Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout nombre x réel par $f(x)=x^2$.

1. a) Calculer $f'(2)$ et déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 2.

b) Calculer l'abscisse du point P où la tangente T_1 coupe l'axe des abscisses.

2. Tracer la droite T_1 et la courbe $\mathscr{C}$.

15 Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0{,}5\,;4]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
T_1 désigne la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 ;
T_2 désigne la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 2.

1. Calculer $f'(1)$ et $f'(2)$, puis déterminer une équation de T_1 et de T_2.

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de T_1 avec les axes du repère, puis celles des points d'intersection de T_2 avec les axes du repère.

3. Tracer les droites T_1 et T_2 et la courbe $\mathscr{C}$.

16 On dispose, pour une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$ des informations données dans le tableau suivant. Dans ce tableau, $f'(a)$ désigne le nombre dérivé de f en a.

a	-1	0	$0{,}5$	1	2
$f(a)$	-1	0	1	0	-2
$f'(a)$		3	0	-4	

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Placer les points de coordonnées $(a\,;\,f(a))$.

2. Quand $f'(a)$ est donné, construire la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point abscisse a.

a) Donner une allure possible de la courbe $\mathscr{C}$.

Calcul de dérivées

Fiche méthode 25

***Pour les exercices 17 à 28,** calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.*

17 $f(x) = -4x$; $\quad f(x) = \frac{1}{5}x^2$.

18 $f(x) = 3x - 1$; $\quad f(x) = 2x^3$.

19 $f(x) = \frac{3}{x}$; $\quad f(x) = 2x^2 - 5x$.

20 $f(x) = -\frac{2}{x}$; $\quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 4$.

21 $f(x) = x^2 + 3x$; $\quad f(x) = x + \frac{1}{x}$.

22 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$; $\quad f(x) = x^2 + 3x - 7$.

23 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$.

24 $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$; $\quad f(x) = 2x^2 - \frac{5}{x}$.

25 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 1$.

26 $f(x) = x^3 + x + 1$; $\quad f(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{3}x^2$.

27 $f(x) = -x^2 + 3x - 4$; $\quad f(x) = \frac{3}{4x} - \frac{5}{2}x^2$.

28 $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$; $\quad f(x) = 2x^2 + \frac{5}{x}$.

29 On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$f(x) = (x-1)(x+2)$.

1. En développant le produit $(x-1)(x+2)$, donner une autre expression de $f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$.

30 On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x strictement positif par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x}.$$

1. Écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ où a et b sont des nombres réels.

2. En utilisant la forme obtenue précédemment, calculer $f'(x)$.

***Pour les exercices 31 à 36,** on considère une fonction f.*
1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. Calculer le nombre dérivé $f'(a)$ où a est un nombre donné.

31 $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$; $\quad a = 0$.

32 $f(x) = 2x^2 - 4x$; $\quad a = 1$.

33 $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$; $\quad a = -1$.

34 $f(x) = \frac{5}{x}$; $\quad a = 2$.

35 $f(x) = \frac{-3}{x} + 2$; $\quad a = 3$.

36 $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $\quad a = 1$.

ÊTES-VOUS CAPABLE DE ...

...calculer une dérivée ?

On lit dans le formulaire d'examen que :
si $u(x) = x^2$, alors $u'(x) = 2x$.
si $v(x) = 2x + 5$, alors $v'(x) = 2$.

1. Si $f(x) = x^2 + 2x + 5$, quelle est l'expression de $f'(x)$?

- ❑ $f'(x) = 2x - 2$
- ❑ $f'(x) = 2(2x)$
- ❑ $f'(x) = 2x + 2$

2. Si $f(x) = 3x^2$, quelle est l'expression de $f'(x)$?

❑ $f'(x) = 6x$ ❑ $f'(x) = 5x$ ❑ $f'(x) = 3x$

Fiche méthode 25 p. 164
Réponse p. 189

37 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 4x + 2$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Calculer les nombres dérivés $f'(-1)$ et $f'(0)$.

38 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 3x + 1$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f'(x)$.

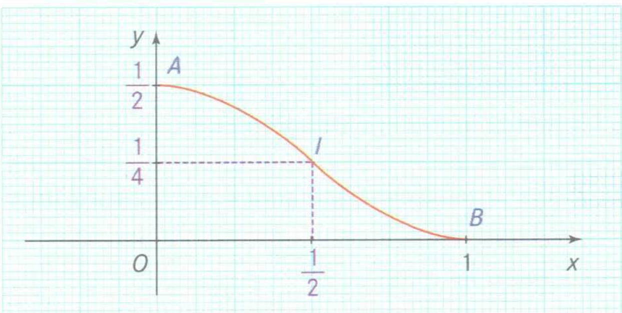
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 2.

39 Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par :
$f(x) = -x^3 + 3x - 1$.

1. Déterminer $f'(x)$, puis calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
T_1 et T_2 sont les tangentes à $\mathscr{C}$ en ses points d'abscisses 0 et 1.
Déterminer une équation des droites T_1 et T_2.

40 Dans la représentation ci-dessous :
– l'arc $\widehat{AI}$ est un arc de la courbe représentative de la fonction f définie pour tout nombre réel x par :
$f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$.
– l'arc $\widehat{IB}$ est un arc de la courbe représentative de la fonction g définie pour tout nombre réel x par :
$g(x) = x^2 - 2x + 1$.



1. Vérifier que $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Calculer $f'(x)$, puis $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Calculer $g'(x)$, puis $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. Comparer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Variations de fonctions ; Recherche de maximum ou de minimum

Fiche méthode 26

41 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 4]$.
Le tableau de variation de f est le suivant

x	-1		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	1	↗	4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, tracer une courbe possible représentant la fonction f.

42 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-4 ; -1]$.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
Construire, à partir du tableau de variation de f, une représentation graphique possible de f.

x	-4		-2		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4	↗	1	↘	-2

Pour chacun des exercices 43 à 46, on donne une fonction f.
1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. Compléter le tableau de variation de f où a est un nombre précisé. Indiquer si la fonction f admet en a un minimum ou un maximum.

x		a	
signe de $f'(x)$		0	
variation de f			

43 $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $a = 1$.

44 $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; $a = 2$.

45 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$; $a = -1$.

46 $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$; $a = 1$.

Pour chacun des exercices 47 à 50, on considère une fonction f définie sur un intervalle précisé.
1. Calculer $f'(x)$.
2. Établir le tableau de variation de f.

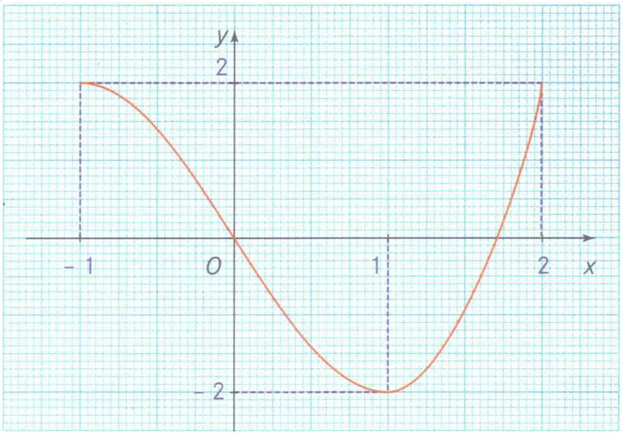
47 Sur $[-1 ; 2]$, $f(x) = 2x^2 - 2x$.

48 Sur $[-1 ; 5]$, $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

49 Sur $[1\ ;\ 5]$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{5}$.

50 Sur $[0{,}5\ ;\ 5]$, $f(x)=0{,}3x+\dfrac{0{,}6}{x}$.

51 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$. La courbe représentative de f est la suivante.



Compléter, à partir de l'observation de la courbe, le tableau de variation de f.

x	– 1		2
$f'(x)$			
$f(x)$			

ÊTES-VOUS CAPABLE DE ...

...étudier les variations d'une fonction ?

Une fonction f est définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$; on donne le tableau de signe de $f'(x)$.

x	– 1		2		5
signe de $f'(x)$		–	0	+	

1. Quel est le tableau de variation de f ?

❑

x	– 1		2		5
$f(x)$		↗	$f(2)$	↘	

❑

x	– 1		2		5
$f(x)$		↗	$f(2)$	↗	

❑

x	– 1		2		5
$f(x)$		↘	$f(2)$	↗	

2. Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$, f admet-elle un maximum ou un minimum égal à $f(2)$?

❑ un maximum ❑ un minimum

Fiche méthode 26 p. 164

► Réponse p. 189

Pour les exercices 52 à 56.
1. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
2. Dans un repère orthonormal, dont l'unité graphique est donnée, tracer la courbe représentative de f.

52 f définie sur $[-1\ ;\ 3]$ par :
$f(x)=x^2+1$;
unité graphique : 1 cm.

53 f définie sur $[0{,}5\ ;\ 5]$ par :
$f(x)=-\dfrac{3}{x}$; *unité graphique* : 2 cm.

54 f définie sur $[-1\ ;\ 2]$ par :
$f(x)=1-2x^2$;
unité graphique : 1 cm.

55 f définie sur $[-1\ ;\ 3{,}5]$ par :
$f(x)=2x^2-6x+1$; *unité graphique* : 1 cm.

56 f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par :
$f(x)=-x^2+3x+5$;
unité graphique : 1 cm.

57 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ par :

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$.

1. a) Calculer $f'(x)$.

b) Vérifier que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f'(x)=(x-1)(x+1)$.

2. Compléter le tableau suivant.

x	– 2		– 1		1		2
signe de $(x-1)$					0		
signe de $(x+1)$			0				
signe de $(x-1)(x+1)$			0		0		

3. Dresser le tableau de variation de f.

58 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$ par :
$f(x)=3x^2-3x^3$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$f'(x)=3x(2-3x)$.

2. Compléter le tableau suivant.

x	– 1		0		$\frac{2}{3}$		2
signe de $f'(x)$		–	0		0		
variation de f	6				$\frac{4}{9}$	↘	– 12